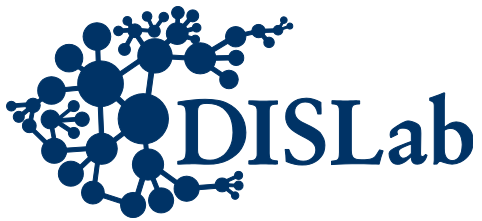
Спецкурс «Параллельная обработка больших графов»

Лекция 2

к.т.н. Александр Сергеевич Семенов

dislab.org



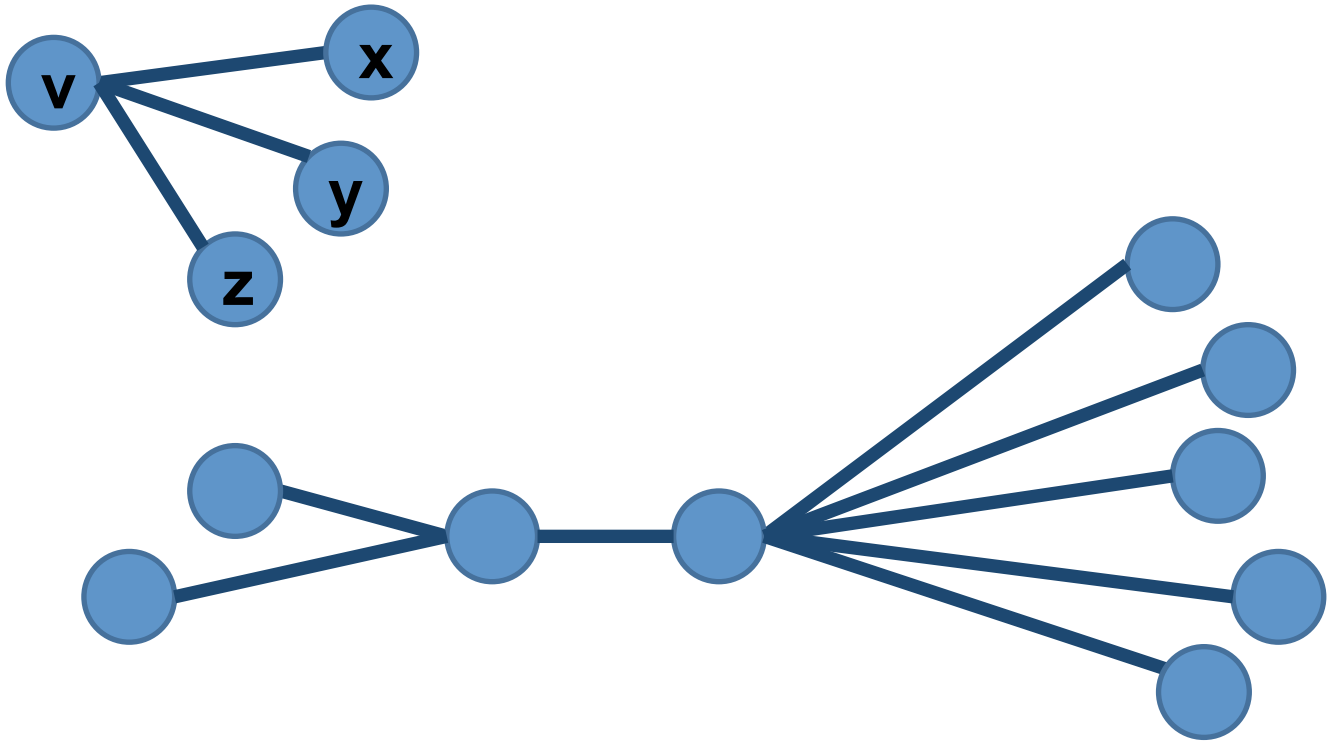
Основные проблемы, возникающие при решении задач обработки графов

Проблемы анализа больших графов

- **Data-driven computations.** Зависимость вычислений от данных (топологии графа). Невозможность применения методов статического распараллеливания вычислений.
- **Unstructured problems.** Работа с нерегулярными, неструктурированными данными, трудность распараллеливания.
- **Poor locality.** Низкая пространственно-временная локализация обращений к памяти.
- **High data access to computation ratio.** Преобладание команд доступа к памяти над командами выполнения арифметических операций.

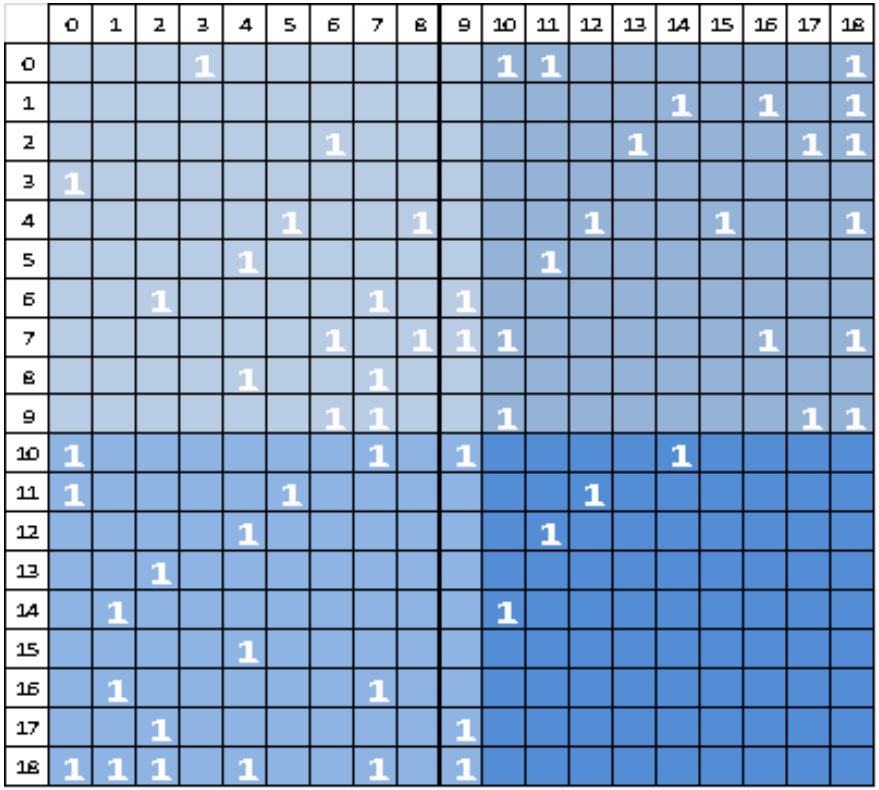
Проблемы анализа больших графов (1)

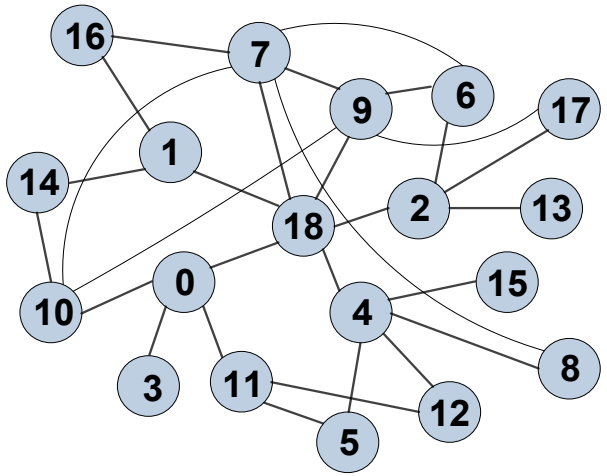
- **Data-driven computations.** Зависимость вычислений от данных (топологии графа). Невозможность применения методов статического распараллеливания вычислений.



Проблемы анализа больших графов (2)

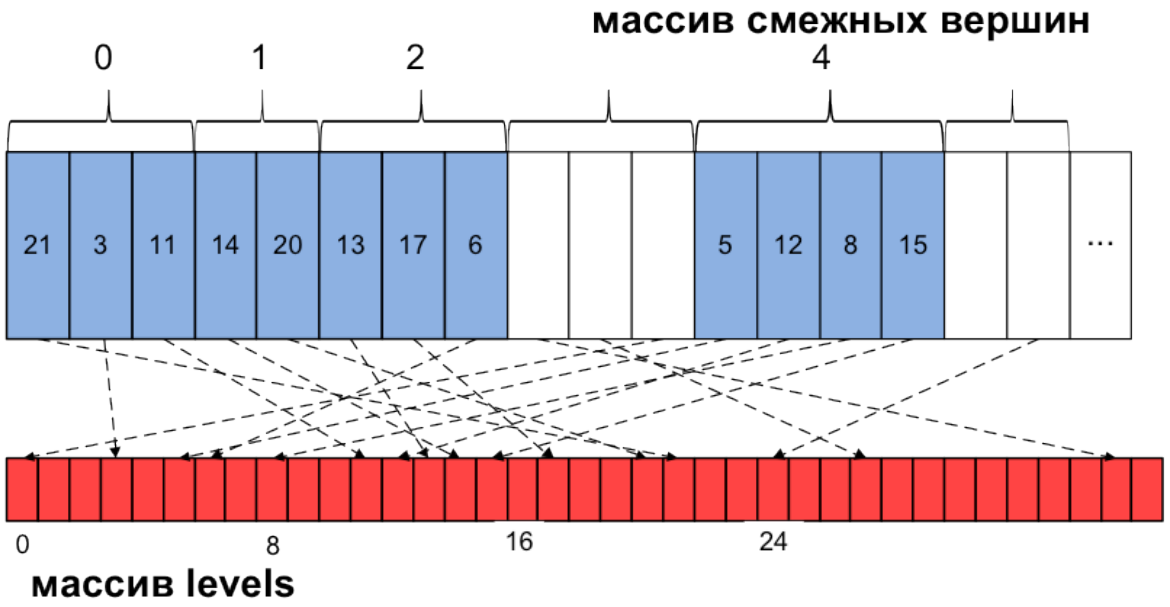
- **Unstructured problems.** Работа с нерегулярными, неструктурированными данными, трудность распараллеливания.

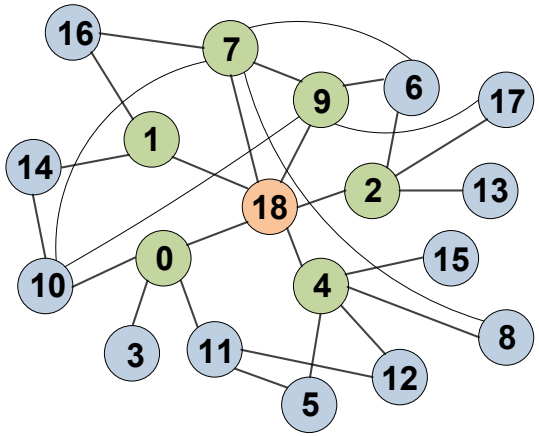




Проблемы анализа больших графов (3)

- **Poor locality.** Низкая пространственно-временная локализация обращений к памяти.





Проблемы анализа больших графов (4)

- **High data access to computation ratio.** Преобладание команд доступа к памяти над командами выполнения арифметических операций.

Intel E5-2680 v3, 2.5 ГГц

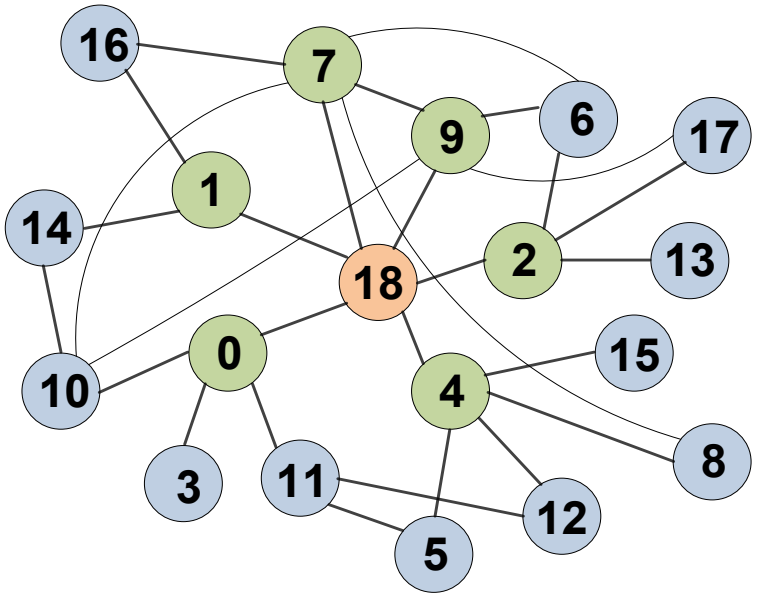
Параметр	Задержка, нс (такты)	ПС, ГБ/с
Регистр	(1)	–
Кэш L1	1.6 (4)	240
Кэш L2	4.4 (11)	160
Кэш L3	16 (40)	80
Память своего сокета	60	~55
Память чужого сокета	100	~30
Сеть Ангара	MPI – 1000 нс, SHMEM – 600 нс	

Алгоритмы обработки графов

Поиск вширь в графе (Breadth-first Search, BFS)

BFS (G, v_{start}) G = (V, E)
Q = {v_{start}}
Visited = {v_{start}}
while Q ≠ {}
    Q_{next} = {}
    for all vertex ∈ Q **do**
        for all w: (vertex, w) ∈ E **do**
            if w ∉ Visited **then**
                Q_{next} = Q_{next} ∪ w
                Visited = Visited ∪ w
            endif
        end for
    end for
    Q = Q_{next}
end while

Сложность **O(N+M)**



Поиск вширь в графе (Breadth-first Search, BFS)

BFS (G, v_{start}) $G = (V, E)$

$Q = \{v_{start}\}$

$Visited = \{v_{start}\}$

while $Q \neq \{\}$

  $Q_{next} = \{\}$

  #pragma omp parallel for

  for all vertex $\in$ Q **do**

    for all w: (vertex, w) $\in$ E **do**

      if w $\notin$ Visited **then**

        #pragma omp critical

          $Q_{next} = Q_{next} \cup w$

          $Visited = Visited \cup w$

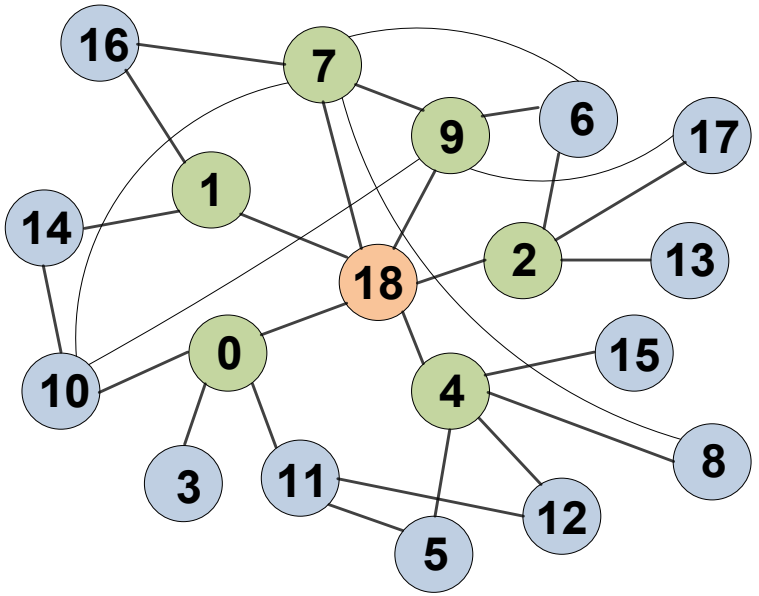
      endif

    end for

  end for

  $Q = Q_{next}$

end while

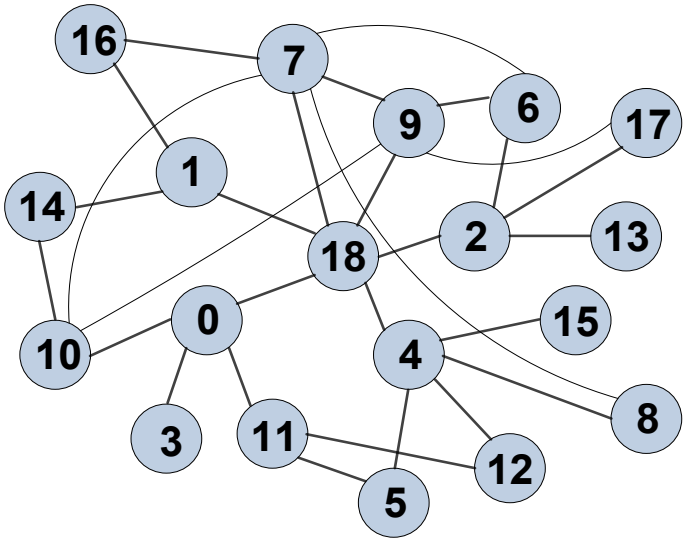


Поиск вглубь в графе (Depth-first Search, DFS)

StartDFS (G, v_{start}) G=(V, E)
Visited = {v_{start}}
DFS(G, v_{start})

DFS (G, vertex)
Visited = Visited ∪ vertex
for all w: (vertex, w) ∈ E **do**
    if w ∉ Visited **then**
        DFS(G, w)
    endif
end for

Сложность **O(N+M)**



Поиск всех кратчайших путей от заданной вершины в графе (Single Source Shortest Paths, SSSP)

$$G = (V, E, W), W : E \to R, undirected$$

$$p(v_0, v_k) = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$$

$$w(p) = \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i)$$

$$\delta(u, v) = \begin{cases} \min\{w(p)\}, \exists p(u, v) \\ \infty, otherwise \end{cases}$$

SSSP, Вспомогательные процедуры

```
InitializeSingleSource(G, s)
for all v ∈ V
    d[v] = inf
end for
d[s] = 0

Relax(u, v, w)
if d[v] > d[u] + w(u, v)
    d[v] = d[u] + w(u, v)
    p[v] = u
end if
```

SSSP, Алгоритм Дейкстры

```
Dijkstra (G, w, s)
InitializeSingleSource(G, s)
S = {}
Q = V
while Q != {}
    u = GetMin (Q)
    S = S U {u}
    Q = Q / {u}
    for all v in Adj[u]
        Relax (u, v, w)
    end for
end while
```

- G(V, E, W) – ориентированный, w(e)>=0, w **in** W
- последовательный

Сложность $O(N^2+M)$, $O(N \lg N + M)$

SSSP, Алгоритм Беллмана-Форда

```
BellmanFord (G, s)
InitializeSingleSource(G, s)
for i = 1 to |V| - 1
    for all (u, v) in E
        Relax(u, v, w)
    end for
end for
```

- G(V, E, W) – ориентированный, W: E -> R
- может определять наличие циклов с отрицательным весом

Сложность O(N M)

SSSP, Алгоритм Беллмана-Форда

```
BellmanFord (G, s)
InitializeSingleSource(G, s)
for i = 1 to |V| - 1
    #pragma omp parallel for
    for all (u, v) in E
        Relax(u, v, w) // атомарно
    end for
end for
```

SSSP, Алгоритм delta-stepping (1/4)

- G(V, E, W) – ориентированный, w(e)>=0, w **in** W
- delta **in** R, delta >= 0

```
DeltaStepping (G, w, s, delta)
InitializaDeltaStepping
i = 0
while true
    processBucket(i)
    i = min(k > i : B_k != {} )
    if i != inf then break
end while
```

SSSP, Алгоритм delta-stepping (2/4)

InitializeDeltaStepping (G, w, s)
for all u in V
    d(u)= inf
end for
d(s) = 0
B_0={s}
B_{inf} = V / {s}
B_1=B_2=…= {}

SSSP, Алгоритм delta-stepping (3/4)

ProcessBucket (i)
$A = B_i$
while A != {}
    for all u **in** A, **for all** e = (u, v) **in** E
        Relax(u, v)
    end for
    A’ = {x : d(x) изменен в предыдущем цикле}
    $A = B_i \cap A'$
end while

SSSP, Алгоритм delta-stepping (4/4)

Relax (u, v)

i = $\lfloor d(v) / delta \rfloor$ // старый bucket

$d(v) = \min(d(v), d(u) + w(u,v))$

j = $\lfloor d(v) / delta \rfloor$ // новый bucket

if j < i **then** переместить v из B_i в B_j

SSSP, Алгоритм delta-stepping

```
DeltaStepping (G, w, s, delta)
InitializaDeltaStepping
i = 0
while true
    processBucket(i)
    i = min(k > i : B_k != {} )
    if i != inf then break
end while
```

- Для случайных графов «хороший» показатель delta = 1/d, где d – максимальная степень вершины, w in [0; 1]
- Сложность O(d N)

SSSP, Алгоритм delta-stepping

```
ProcessBucket (i)
A = B_i
while A != {}
    #pragma omp parallel for
    for all u in A, for all e = (u, v) in E
        Relax(u, v) // атомарно
    end for
    A' = {x : d(x) changed in previous for all}
    A = B_i ∩ A'
end while
```